Math 341, Assignment 14

① a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 12$

$= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 12$

$= \lambda^2 - 3\lambda - 10$

$= (\lambda-5)(\lambda+2) = 0$

$\lambda = 5, -2$

$\lambda = 5: \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\lambda = -2: \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{-3-4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

c) $D = P^{-1}AP = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

② $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2$

$= 4 - 5\lambda + \lambda^2 + 2$

$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$= (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

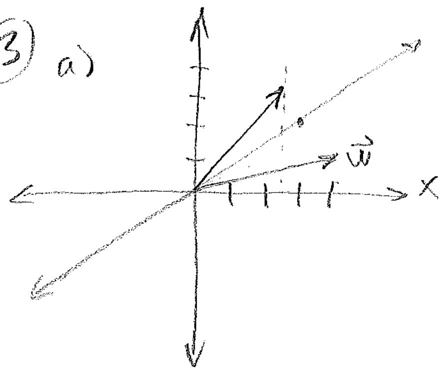
$\lambda = 2, 3$

$\lambda = 2: \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3: \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(3) a)



b) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow B\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \lambda = 1$

c) $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow B\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \lambda = -1$

d) $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \dfrac{1}{9-(-4)} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$B = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

e) $B\vec{w} = \dfrac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{13} \begin{bmatrix} 32 \\ 43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{6}{13} \\ 3\frac{4}{13} \end{bmatrix}$ Hmmm...

Yes, it is correct